Задачи к зачету 26 12

Темы и примеры решений

1. Классификация случайных процессов. Основные характеристики случайных процессов

Пример. Определить среднее, дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса X(t)=A exp(-t), t>0, A –с.в. имеющая нормальное распределение с параметрами a,σ2.

Решение Очевидно M(X(t))=M(A)exp(-t)=aexp(-t);D(X(t))=M(X2(t))-M(X(t))2=

M(A2exp(-2t))-a2exp(-2t)=exp(-2t)(M(A2)-a2)=exp(-2t)(σ2+a2-a2)=σ2exp(-2t);

Cov(X(t))=M(X(t)X(s))-M(X(t))M(X(s))=M(A2)exp(-t-s)-a2exp(-t-s)=σ2exp(-t-s)

1. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский и винеровский процессы

Пример. Поток посетителей библиотеки является пуассоноским с интенсивностью λ=2чел/мин. Найти вероятность события, что за 3 мин библиотеку посетят менее 3 чел

Решение. По формуле Пуассона . Следовательно, вероятность события, что за 3 мин библиотеку посетят  человек будет даваться формулой Пуассона с параметром , то есть , или если к<3 то

 =9e-6

1. Cтационарные случайные процессы. Спектральное разложение стационарного случайного процесса

Пример. Задана корреляционная функция стационарного сучайного процесса Найти спектральную плотность этого процесса

Решение. Спектральная плотность задается формулой  Подставляя в эту формулу нужные функции, получаем 

4 Цепи Маркова. Стационарные и переходные вероятности

Пример. Дана эргодическая цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей.

 Найти стационарное распределение

Решение. Стационарное распределение удовлетворяет системе уравнений

. Имеем 

Подставляя из первого уравнения из соотношения

 находим 

5 Цепи Маркова. Уравнения Колмогорова

Пример Дана матрица интенсиностей марковской цепи следующего вида



Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова и найти предельные распределения вероятностей

Решение Система дифференциальных уравнений записывается следующим образом

, I,k=1,…n

В нашем случае для каждого i=1,2,3 имеем

В частности для i=1 записываем

 

 Это система линейных диф уравнений с матрицей А. Ее стандартный метод решения следующий- ищем решение в виде Подставляя в систему получаем

или , где E-единичная матрица. То есть имеем задачу на собственнык значения. Для данной матрицы собственные значения легко находятся и равны Отсюда  То есть для нахождения стационарного распределения надо найти из системы 

6. Интегралы и производные от случайных процессов.

 Пример. Заданы математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция случайного процесса ; Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса

Решение.

 

7. Стохастический интеграл

Пример стандартный винеровский процесс.  Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение 

8 Стохастический дифференциал и линейные дифференциальные уравнения

Пример Решить уравнение



Решение. Сначало решаем уравнение . Имеем Затем методом вариации постоянной получаем или . Окончательно Из начального условия (п.н.)

9. Диффузионные процессы, уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка, формула Ито.

Пример. Найти распределение процесса удовлетворяющему стохастическому дифференциальному уравнению с начальным условием 

Решение. Делаем замену Тогда по формуле Ито По уравнению Колмогорова-Фоккера-Планка , 

Переходя к характеристическим функциям имеем уравнение

или 

То есть характеристичекая функция гауссовского распределения с дисперсией 1 и средним ½.

10. Выделение сигнала на фрне шума.

Пример Пусть наблюдается и Найти наилучшую линейную оценку коэффициентов по наблюдениям за на интервале t =(0,1)

Решение. Строим матрицу , то есть

 Обратная матрица B-1будет Следовательно оптимальной оценкой будет



11.Линейная фильтрация, уравнения Калмана-Бьюси.

Пример Найти наилучшую оценку для сигнала по наблюдениям если 

Решение. Сначала строится уравнение Калмана

c начальным условием  Его решением очевидно будет 

Далее это решение подставляется в уравнение оптимального фильтра его решением будет

Окончательно, и 